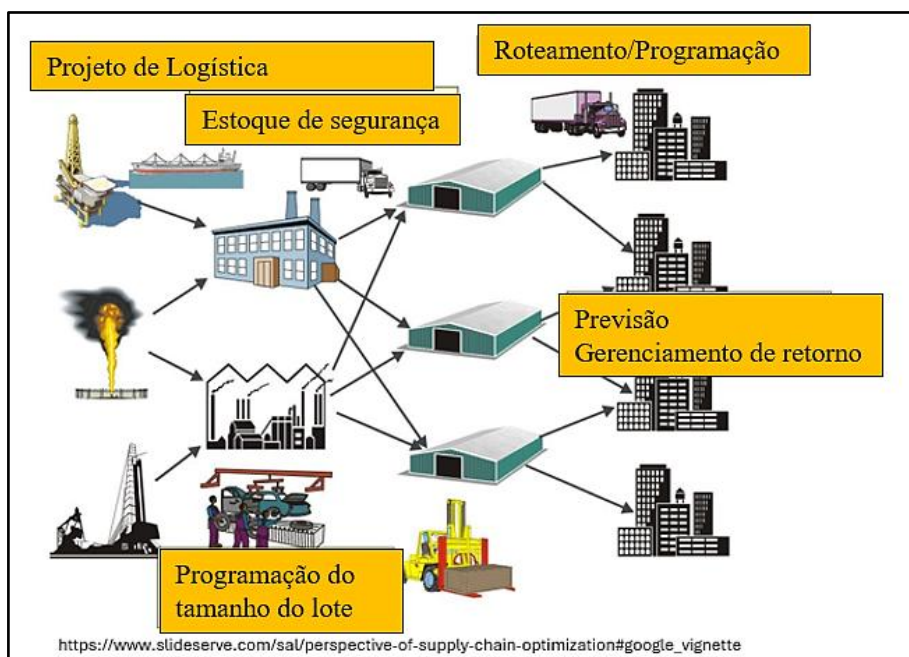


Matemática para o Século XXI

Volume II

Otimização



PREFÁCIO

"O que é a matemática? É apenas um esforço sistemático de resolver os enigmas propostos pela natureza." — Shakuntala Devi

Toda decisão é uma otimização.

Quando um médico escolhe entre dois tratamentos, está implicitamente maximizando a probabilidade de recuperação e minimizando os efeitos colaterais. Quando uma empresa define o preço de um produto, está tentando maximizar a receita dentro das restrições que o mercado impõe. Quando um engenheiro projeta uma ponte, está minimizando o peso da estrutura sem comprometer a resistência. Quando um algoritmo de busca ordena resultados, está maximizando a relevância percebida pelo usuário.

A otimização não é uma técnica especializada que alguns profissionais usam em situações particulares. É a estrutura matemática subjacente a toda escolha racional diante de restrições — e restrições existem sempre. Tempo é limitado. Recursos são escassos. As leis da física impõem limites. O orçamento tem um teto. A capacidade de produção tem um máximo.

A questão nunca é se otimizar. A questão é se otimizar conscientemente, com as ferramentas certas, ou inconscientemente, confiando em intuições que podem sistematicamente falhar.

Este volume apresenta a matemática da escolha consciente.

O problema mais antigo da matemática

Otimizar é encontrar o melhor. E a pergunta sobre o que é melhor é tão antiga quanto o pensamento humano.

Os gregos já sabiam que entre todos os polígonos com um dado perímetro, o círculo é o que tem maior área. A prova rigorosa levou séculos — mas a intuição estava certa. A natureza também otimiza: as colmeias usam hexágonos porque essa forma maximiza o espaço de armazenamento para uma quantidade fixa de cera. As bolhas de sabão assumem formas esféricas porque a esfera minimiza a área superficial para um dado volume.

Mas foi o cálculo de Newton e Leibniz que deu à otimização a sua primeira linguagem matemática precisa. A derivada identifica os pontos onde uma função atinge máximos ou mínimos — os pontos onde a taxa de variação é zero. Com essa ferramenta, problemas que haviam resistido a séculos de geometria foram resolvidos em linhas de álgebra.

O que o século XX acrescentou foi a otimização com restrições — o problema de encontrar o melhor não no universo de todas as possibilidades, mas no subconjunto das possibilidades que satisfazem certas condições. É essa versão do problema que aparece em quase todos os contextos reais, e é essa versão que este volume desenvolve em profundidade.

A elegância da programação linear

Em 1947, George Dantzig desenvolveu o método simplex para a Força Aérea americana, num contexto de planejamento logístico de guerra. O problema era simples de enunciar e aparentemente impossível de resolver eficientemente: dados recursos limitados, como alocá-los para maximizar um objetivo?

A resposta de Dantzig foi geométrica. O conjunto de soluções possíveis — as que satisfazem todas as restrições — forma um poliedro num espaço de alta dimensão. Os vértices desse poliedro são candidatos naturais à solução ótima. O método simplex percorre esses vértices de forma sistemática, movendo-se sempre na direção de melhora, até encontrar o ótimo.

O que parecia ser um truque específico para problemas militares tornou-se uma das ferramentas mais usadas da matemática aplicada. Hoje, a programação linear é usada para otimizar rotas de distribuição, alocar pessoal em hospitais, planejar a dieta de populações vulneráveis, gerenciar carteiras de investimento e decidir qual mix de produtos uma fábrica deve produzir.

Este volume apresenta a programação linear com exemplos concretos que você pode resolver à mão — farinha, ovos e leite; mesas, cadeiras e armários — antes de avançar para problemas da escala real que exigem ferramentas computacionais. Porque entender um exemplo pequeno com perfeição é mais valioso do que aplicar uma fórmula num exemplo grande sem compreendê-la.

A memória como ferramenta de otimização: programação dinâmica

Há uma classe de problemas de otimização que os métodos contínuos e lineares não conseguem capturar: problemas em que as decisões são tomadas em sequência, cada uma condicionada ao resultado das anteriores, e em que a solução ótima do todo é construída a partir das soluções ótimas das partes.

A **Programação Dinâmica**, desenvolvida por Richard Bellman nos anos 1950, é a matemática dessas decisões sequenciais. O seu princípio central — que Bellman chamou de princípio da otimalidade — é singelamente simples: a solução ótima de um problema contém, necessariamente, soluções ótimas dos seus subproblemas. Se o caminho mais curto de A a C passa por B, então o trecho de A a B também é o caminho mais curto entre esses dois pontos.

Esse princípio transforma problemas de complexidade exponencial em problemas de complexidade polinomial. Em vez de explorar todas as combinações possíveis — um espaço que cresce como 2^n — a programação dinâmica resolve cada subproblema uma única vez, armazena o resultado, e o reutiliza sempre que necessário. A diferença prática é dramática: para F(50) na sequência de Fibonacci, a recursão ingênua realiza cerca de 12 bilhões de chamadas; a versão com programação dinâmica realiza exatamente 49 operações.

Este volume introduz a programação dinâmica por dois caminhos complementares. O primeiro é a sequência de Fibonacci — o exemplo mais simples possível, onde a recorrência é transparente e os ganhos de eficiência são imediatos. O segundo é o algoritmo Smith-Waterman, que aplica programação dinâmica ao alinhamento local de sequências biológicas: dado que genes de espécies diferentes compartilham regiões funcionais conservadas, o objetivo é encontrar os subsegmentos de maior similaridade entre duas sequências de DNA ou proteínas — mesmo que as sequências completas sejam muito diferentes.

A estrutura do Smith-Waterman é idêntica à do Fibonacci numa dimensão a mais: uma matriz bidimensional preenchida de baixo para cima, onde cada célula acumula a pontuação do melhor alinhamento local que termina naquela posição. O traceback — o caminho de volta desde a pontuação máxima até o primeiro zero — revela exatamente qual região das duas sequências é biologicamente conservada.

Eficiência sem fórmula

Há um tipo de problema de otimização que a maioria dos cursos ignora completamente — e que é, na prática, um dos mais importantes.

Como avaliar se um hospital está usando bem os seus recursos, quando hospitais diferentes atendem populações diferentes, têm tecnologias diferentes e enfrentam condições diferentes? Como comparar a eficiência de agências bancárias que operam em mercados com características distintas? Como avaliar escolas quando cada uma recebe alunos com backgrounds socioeconômicos muito diferentes?

A resposta clássica é construir um modelo — definir uma função que relaciona insumos com produtos e otimizá-la. Mas essa resposta pressupõe que sabemos qual é a função correta, e na maioria dos casos não sabemos.

A Análise Envoltória de Dados — DEA — resolve esse problema de uma forma elegante: em vez de impor uma função de produção, ela usa programação linear para construir empiricamente uma fronteira de eficiência a partir dos dados disponíveis. As unidades que operam sobre essa fronteira são eficientes por definição — nenhum repositório de dados sugere que poderiam fazer melhor com

os mesmos recursos. As que operam abaixo da fronteira têm uma medida precisa de quanto poderiam melhorar, e um conjunto de unidades de referência que mostra como.

É otimização sem modelo pré-especificado. É uma ferramenta de avaliação que não precisa saber de antemão o que é eficiência — ela a descobre nos dados.

Quando os objetivos são múltiplos e conflitantes

A maioria das decisões reais não tem um único objetivo. Um médico não quer apenas maximizar a eficácia do tratamento — quer também minimizar os efeitos colaterais, considerar a qualidade de vida do paciente, respeitar as suas preferências e operar dentro de um orçamento. Esses objetivos frequentemente conflitam: o tratamento mais eficaz pode ter os efeitos colaterais mais severos.

A Tomada de Decisão Multicritério formaliza esse conflito. Em vez de fingir que há um único objetivo, ela trabalha explicitamente com múltiplos critérios, com pesos que refletem as preferências do decisor, e com métodos para encontrar soluções que equilibram os objetivos de forma transparente e rastreável.

Neste domínio não há otimização no sentido clássico — não há uma solução que seja ótima em todos os critérios simultaneamente. Há soluções Pareto-eficientes: soluções nas quais é impossível melhorar num critério sem piorar em outro. O papel da matemática não é escolher entre essas soluções — essa é uma decisão de valor, que pertence ao decisor — mas tornar as trocas explícitas e mensuráveis.

A matemática da interação estratégica

Até aqui, o problema de otimização tem uma estrutura solitária: um único decisor, um único objetivo, um conjunto de restrições. O mundo real raramente é assim.

Na maioria das situações de decisão importantes, há múltiplos agentes tomando decisões simultaneamente, e a decisão de cada um afeta os resultados de todos os outros. Uma empresa que define o seu preço está respondendo ao preço dos concorrentes — que estão, por sua vez, respondendo ao preço dela. Um político que escolhe a sua plataforma está respondendo à plataforma dos adversários. Um país que decide o nível de proteção tarifária está respondendo às decisões tarifárias dos parceiros comerciais.

A teoria dos jogos é a matemática dessa interdependência. Desenvolvida por John von Neumann e Oskar Morgenstern nos anos 1940 e aprofundada por John Nash nos anos 1950, ela oferece conceitos precisos para analisar situações em que o resultado de cada agente depende das ações de todos os outros.

O Dilema do Prisioneiro é o exemplo mais famoso — e o mais instrutivo. Dois suspeitos, interrogados separadamente, enfrentam a mesma escolha: cooperar com o parceiro ou denunciá-lo. A lógica individual leva ambos a denunciar, mesmo que a cooperação mútua produzisse um resultado melhor para ambos. É um modelo da tragédia dos comuns, das corridas armamentistas, das negociações comerciais, da competição em mercados oligopolísticos.

Mas a teoria dos jogos vai muito além do Dilema do Prisioneiro. O Teorema Minimax de von Neumann garante que em jogos de soma zero, cada jogador tem uma estratégia ótima — possivelmente mista, envolvendo aleatoriedade. O Equilíbrio de Nash generaliza essa ideia para jogos não-cooperativos de qualquer tipo: é um perfil de estratégias no qual nenhum jogador tem incentivo unilateral para mudar, dados os comportamentos dos outros.

O Modelo de Hotelling — dois vendedores numa praia que convergem para o centro — explica por que os partidos políticos tendem a se aproximar do eleitor mediano, por que as redes de televisão produzem programas semelhantes e por que os postos de gasolina se agrupam nas mesmas esquinas.

E o Teorema da Impossibilidade de Arrow — talvez o resultado mais perturbador de toda a teoria da escolha social — prova que não existe nenhum sistema de votação que satisfaça simultaneamente cinco critérios razoáveis de justiça. Qualquer método de agregar preferências

individuais em preferências coletivas viola pelo menos um desses critérios. A democracia perfeita é matematicamente impossível — e saber disso é mais valioso do que não saber.

Otimização e aprendizado de máquina

Este volume encerra com um olhar para o horizonte — a conexão entre otimização e o Volume VI da coleção.

O treinamento de uma rede neural é um problema de otimização. Dados milhões de parâmetros e uma função de custo que mede o erro de previsão, o objetivo é encontrar os parâmetros que minimizam o custo. O algoritmo que faz isso — *gradient descent* estocástico — é otimização contínua em espaços de dimensão astronômica.

Mas a conexão é mais profunda. Os fundamentos teóricos do aprendizado de máquina — consistência estatística, generalização, capacidade de aproximação — são resultados de otimização. A questão de por que redes neurais generalizam bem, apesar de serem enormemente sobreparametrizadas, é uma questão em aberto na teoria da otimização. E os avanços mais recentes em eficiência de treinamento — métodos de segunda ordem, otimização adaptativa, esquemas de agendamento da taxa de aprendizado — são desenvolvimentos de otimização matemática aplicados ao aprendizado de máquina.

Ao completar este volume, você terá as ferramentas para entender não apenas como otimizar problemas estruturados — com variáveis, restrições e objetivos bem definidos — mas também a linguagem para acompanhar os desenvolvimentos na fronteira da inteligência artificial, onde otimização e aprendizado se tornam inseparáveis.

Sobre o que este volume não faz

Uma advertência honesta: este volume não vai torná-lo um especialista em pesquisa operacional. Não vai equipá-lo para resolver os problemas de otimização de maior escala que a indústria enfrenta — aqueles que envolvem milhões de variáveis, restrições não-lineares complexas e estrutura combinatória intratável.

O que vai fazer é algo diferente e, argumentamos, mais valioso: vai dar-lhe uma compreensão estrutural de o que a otimização é, quais são as suas variantes fundamentais, quais as suas potências e limitações, e como reconhecer um problema de otimização quando ele aparece disfarçado de problema de gestão, de política pública, de design de sistemas ou de tomada de decisão clínica.

Porque o obstáculo mais comum à aplicação da otimização não é a falta de algoritmos sofisticados. É a incapacidade de formular o problema corretamente — de identificar o que é o objetivo, quais são as restrições, quais são as variáveis de decisão, e quais simplificações são legítimas e quais distorcem o problema a ponto de tornar a solução inútil.

Formular bem é a habilidade fundamental. Os algoritmos — e os computadores que os executam — cuidam do resto.

A estrutura deste volume

O volume progride de problemas mais simples para mais complexos, de estruturas mais restritas para mais gerais.

Começa com a programação linear — o caso em que tanto o objetivo quanto as restrições são lineares — e desenvolve a teoria geométrica e algorítmica completa, incluindo análise de sensibilidade e preços sombra. Avança para a programação inteira, onde as variáveis são discretas, e para a programação não linear, onde a linearidade é abandonada. Introduce a Análise Envoltória de Dados e a Tomada de Decisão Multicritério como ferramentas para problemas onde o modelo explícito é difícil de especificar. E termina com a teoria dos jogos — onde a otimização individual encontra a interação estratégica e se transforma em algo mais rico e mais complexo.

Ao longo de todo o volume, cada conceito é apresentado com um exemplo concreto antes da formulação geral, e cada formulação geral é acompanhada de uma implementação em Python que permite explorar variações sem refazer os cálculos à mão.

Sumário

1. O Que é Otimização	Error! Bookmark not defined.
2. Programação Linear	Error! Bookmark not defined.
A Formulação do Problema.....	Error! Bookmark not defined.
O Método Simplex	Error! Bookmark not defined.
Usando o Solver	Error! Bookmark not defined.
Farinha-Ovos-Leite (Continuação)	Error! Bookmark not defined.
Mesa – Cadeira - Armário	Error! Bookmark not defined.
Análise de Sensibilidade	Error! Bookmark not defined.
Carrinho de Bebê.....	Error! Bookmark not defined.
O Problema da Dieta	Error! Bookmark not defined.
O Problema da Produção.....	Error! Bookmark not defined.
O Problema do Transporte	Error! Bookmark not defined.
3. Programação Linear Inteira.....	Error! Bookmark not defined.
Problema de Gestão De Pessoal	Error! Bookmark not defined.
Análise de um Restaurante Chinês.....	Error! Bookmark not defined.
Problemas Típicos de Programação Linear.....	Error! Bookmark not defined.
4. Programação Não Linear.....	Error! Bookmark not defined.
Usando Python	Error! Bookmark not defined.
Exercícios	Error! Bookmark not defined.
5. Programação Dinâmica	Error! Bookmark not defined.
A Ideia Central da Programação Dinâmica	Error! Bookmark not defined.
Um Exemplo Introdutório: Fibonacci	Error! Bookmark not defined.
Algoritmo Smith-Waterman	Error! Bookmark not defined.
6. Análise Envoltória de Dados (DEA)	Error! Bookmark not defined.
Seleção de Insumos e Produtos (Entradas e Saídas)	Error! Bookmark not defined.
Análise de uma Rede Bancária	Error! Bookmark not defined.
Abordagem Matemática da DEA	Error! Bookmark not defined.
Usando Python	Error! Bookmark not defined.
Análise de uma Rede Hospitalar	Error! Bookmark not defined.
7. Tomada de Decisão Multicritério (MCDM).....	Error! Bookmark not defined.
Mapa de Aprofundamento.....	Error! Bookmark not defined.
8. Otimização em Economia - Aplicações	Error! Bookmark not defined.
Funções de Utilidade.....	Error! Bookmark not defined.

Funções de Escala: Retornos Constantes	Error! Bookmark not defined.
9. Teoria dos Jogos	Error! Bookmark not defined.
Jogos Cooperativos e Não Cooperativos.....	Error! Bookmark not defined.
Jogos de Soma Zero e Soma Não Zero	Error! Bookmark not defined.
Jogos Sequenciais ou Simultâneos	Error! Bookmark not defined.
Informação perfeita ou imperfeita.....	Error! Bookmark not defined.
Dilema do Prisioneiro	Error! Bookmark not defined.
O Teorema Minimax	Error! Bookmark not defined.
Equilíbrio de Nash.....	Error! Bookmark not defined.
Duopólio de Cournot.....	Error! Bookmark not defined.
Equilíbrio de Nash e Ótimo de Pareto.....	Error! Bookmark not defined.
Modelo Espacial de Hotelling.....	Error! Bookmark not defined.
O Modelo Downsiano	Error! Bookmark not defined.
Escolha Social e os Limites da Agregação.....	Error! Bookmark not defined.
Jogos Cooperativos	Error! Bookmark not defined.
O Valor de Shapley.....	Error! Bookmark not defined.
<i>Fruit Wars</i>	Error! Bookmark not defined.
Teoria dos Jogos na Prática	Error! Bookmark not defined.
Exercício	Error! Bookmark not defined.
10. Epílogo: Do Equilíbrio à Complexidade.....	Error! Bookmark not defined.
11. Bibliografia.....	Error! Bookmark not defined.

