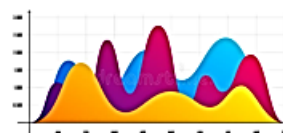


Matemática para o Século XXI

Volume I

Ferramentas



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prefácio

No Volume 0, fizemos perguntas.

O que é um número? O que é uma prova? O que é o infinito? O que a matemática pode e não pode dizer sobre si mesma?

Essas perguntas não têm respostas simples — e esse foi o ponto. A matemática começa na inquietação, na recusa em aceitar o óbvio como evidente, na disposição de seguir um argumento até onde ele leva mesmo que o destino seja perturbador.

Mas a matemática não vive apenas de perguntas filosóficas. Ela também constrói. Ela fabrica instrumentos — conceitos, estruturas, algoritmos — que permitem medir, modelar, prever e decidir. E é exatamente isso que este volume faz.

O Volume I é a caixa de ferramentas da coleção inteira.

O que é uma ferramenta matemática

Uma ferramenta manual serve a um propósito específico. Um martelo prega pregos. Uma chave de fenda aperta parafusos. O carpinteiro experiente sabe qual ferramenta usar em cada situação — e sabe também, o que é mais importante, quando a ferramenta errada vai estragar o trabalho.

Uma ferramenta matemática é diferente em um aspecto fundamental: ela serve a múltiplos propósitos simultaneamente, em domínios que parecem não ter nada a ver uns com os outros.

A derivada foi inventada por Newton para descrever o movimento dos planetas. Hoje ela aparece em modelos de propagação de epidemias, na otimização de redes neurais, na precificação de opções financeiras e na análise de circuitos elétricos. O conceito é o mesmo — a taxa de variação instantânea de uma função — mas as aplicações se espalham por toda a ciência e tecnologia modernas.

A matriz foi desenvolvida para resolver sistemas de equações lineares. Hoje ela é a estrutura fundamental da computação gráfica, da tomografia computadorizada, da compressão de imagens, do aprendizado de máquina e da mecânica quântica. Uma matriz não é apenas um arranjo retangular de números — é uma transformação, uma rotação, uma projeção, uma mudança de perspectiva.

A distribuição de probabilidade foi criada para analisar jogos de azar. Hoje ela modela desde a distribuição de alturas numa população até o comportamento de partículas subatômicas, desde a flutuação de preços em mercados financeiros até a incerteza nas previsões climáticas.

As ferramentas que este volume apresenta têm essa característica: são conceitos que aparecem em todo lugar, que se conectam entre si de formas inesperadas, e que formam uma linguagem comum para todas as ciências quantitativas.

A primeira ferramenta: dizer o que os dados dizem

Vivemos na era dos dados. Nunca na história humana foram coletados tantos números sobre tantos fenômenos — clima, saúde, comportamento, economia, física, biologia. E nunca foi tão importante saber o que fazer com eles.

A estatística é a matemática dos dados. Mas a estatística não é apenas um conjunto de fórmulas para calcular médias e desvios padrão. É uma epistemologia — uma teoria do conhecimento — que responde à pergunta: o que os dados nos autorizam a afirmar?

Esta distinção é crucial e frequentemente ignorada. Os dados nunca falam por si mesmos. Eles precisam ser interpretados dentro de um modelo, com hipóteses explícitas sobre como foram coletados, qual população representam, e quais fontes de variação estão presentes. Ignorar essas hipóteses não produz conclusões objetivas — produz conclusões erradas com uma aparência de rigor.

Este volume apresenta a estatística com essa consciência. Você aprenderá a calcular as medidas de tendência central e dispersão, mas aprenderá também quando cada medida é adequada e quando ela engana. Aprenderá testes de hipóteses, mas também aprenderá o que um valor p realmente significa — e o que ele definitivamente não significa, apesar do que a maioria dos textos sugere.

A segunda ferramenta: raciocinar sobre incerteza

A probabilidade é a matemática da incerteza. E a incerteza está em todo lugar — não como falha do conhecimento humano, mas como característica estrutural do mundo.

Há incerteza no resultado de um experimento físico porque os instrumentos de medição têm precisão finita. Há incerteza numa previsão epidemiológica porque os modelos são simplificações da realidade. Há incerteza numa decisão médica porque os dados de ensaios clínicos representam populações, não indivíduos. Há incerteza numa previsão meteorológica porque os sistemas atmosféricos são sensíveis às condições iniciais de formas que tornam a previsão de longo prazo matematicamente impossível.

A probabilidade não elimina essa incerteza. Ela a quantifica, a estrutura e a torna gerenciável.

Mas este volume vai além da probabilidade clássica. Apresenta o teorema de Bayes não apenas como uma fórmula para calcular probabilidades condicionais, mas como uma estrutura epistemológica completa — uma forma de atualizar crenças à medida que novas evidências chegam. A interpretação bayesiana da probabilidade é hoje central na ciência de dados, na inteligência artificial e na metodologia científica moderna.

E apresenta o *do-calculus* de Judea Pearl — uma das contribuições mais importantes à estatística das últimas décadas — que formaliza a distinção entre correlação e causalidade. Ver que A e B ocorrem juntos não é o mesmo que saber que A causa B. Essa distinção parece óbvia quando enunciada, mas na prática é violada constantemente — em artigos científicos, em políticas públicas, em decisões de negócios. Pearl desenvolveu uma linguagem matemática precisa para fazer essa distinção rigorosamente, e este volume apresenta os seus fundamentos.

A terceira ferramenta: descrever a mudança

Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz inventaram o cálculo no século XVII para resolver um problema concreto: descrever o movimento. Como calcular a velocidade instantânea de um objeto? Como encontrar o ponto mais alto de uma trajetória? Como calcular a área sob uma curva?

As respostas a essas perguntas — a derivada e a integral — tornaram-se as ferramentas mais poderosas da física matemática. Com elas, Newton descreveu a órbita dos planetas, a queda dos corpos, o comportamento das marés. Com elas, a física clássica foi construída sobre fundamentos que pareciam definitivos.

Mas o cálculo do século XXI não é apenas o cálculo de Newton.

As equações diferenciais — que descrevem como sistemas evoluem no tempo — aparecem em todo modelo dinâmico: populações que crescem e diminuem, epidemias que se propagam e se extinguem, circuitos elétricos que oscilam, mercados que flutuam. O método de Euler para resolver equações diferenciais numericamente conecta o cálculo analítico à computação moderna.

O *gradient descent* — a ideia de seguir a direção de maior declive numa paisagem para encontrar o mínimo — é o algoritmo que treina praticamente todas as redes neurais que existem hoje. É cálculo multivariado aplicado a espaços com milhões de dimensões. Este volume apresenta o gradiente como conceito geométrico antes de apresentá-lo como algoritmo — porque entender o que ele faz geometricamente é o que permite entender por que ele funciona, quando ele falha e como melhorá-lo.

A quarta ferramenta: transformar o espaço

A álgebra linear é a matemática das transformações lineares — das operações que preservam adição e escala. Ela estuda vetores, matrizes, sistemas de equações e as estruturas geométricas que emergem desses objetos.

Dito assim, parece abstrato. Mas considere o que uma matriz realmente faz: ela transforma um espaço. Ela rotaciona, espelha, comprime, expande, projeta. Uma imagem fotográfica é uma matriz de pixels — e todas as operações de compressão, filtragem e reconhecimento de padrões são operações matriciais. Um sistema de equações lineares é uma interseção de hiperplanos num espaço de alta dimensão — e resolver o sistema é encontrar o ponto de interseção.

Os *eigenvectors* e *eigenvalues* de uma matriz revelam as suas direções essenciais — as direções que a transformação não rotaciona, apenas escala. Eles aparecem na análise de vibrações estruturais, na decomposição espectral de grafos, no algoritmo PageRank que o Google usou para ordenar páginas da web, e na análise de componentes principais que reduz a dimensionalidade de dados complexos.

A decomposição em valores singulares — o teorema fundamental da álgebra linear aplicada — permite comprimir imagens, reduzir ruído em sinais, e encontrar a estrutura essencial de conjuntos de dados de alta dimensão. É a ferramenta por trás de sistemas de recomendação, de processamento de linguagem natural e de muito do que hoje chamamos de inteligência artificial.

A quinta ferramenta: simular o aleatório

O mundo real raramente tem soluções analíticas exatas. Os sistemas complexos que encontraremos nos volumes seguintes — epidemias, mercados, ecossistemas, redes neurais — são difíceis ou impossíveis de resolver com lápis e papel.

A simulação é a alternativa. E a simulação moderna é fundamentalmente probabilística.

As cadeias de Markov modelam sistemas que evoluem aleatoriamente mas com uma estrutura de dependência precisa: o estado futuro depende apenas do estado presente, não da história passada. Essa propriedade, que parece uma simplificação brutal, captura o comportamento de uma variedade surpreendente de sistemas reais — desde o movimento de moléculas num gás até o comportamento de usuários numa plataforma digital.

A simulação de Monte Carlo usa amostragem aleatória para resolver problemas determinísticos. Para calcular a área de uma figura irregular, basta jogar pontos aleatórios sobre ela e contar os que caem dentro. Para estimar o valor de π , basta jogar dardos aleatoriamente num quadrado e contar os que caem dentro do círculo inscrito. A ideia é ridiculamente simples — e funciona de forma surpreendentemente poderosa para problemas que resistem a qualquer abordagem analítica.

O passeio aleatório — onde cada passo é dado numa direção determinada por acaso — é um dos modelos mais versáteis da matemática aplicada. Ele descreve o movimento de partículas em suspensão, a flutuação de preços de ativos financeiros, a propagação de informação em redes sociais e o comportamento de algoritmos de busca em grafos.

A sexta ferramenta: analisar o tempo

Os dados do mundo real raramente são estáticos. Temperatura, preço, consumo de energia, batimentos cardíacos — tudo varia ao longo do tempo, e entender essa variação temporal é tanto ou mais importante quanto entender o seu valor médio.

A análise de séries temporais é a matemática dessa variação. Ela decompõe uma série temporal nas suas componentes — tendência, sazonalidade, ciclos, ruído — e constrói modelos que permitem prever valores futuros a partir do comportamento passado.

Os modelos ARIMA — autorregressivos integrados de médias móveis — são o padrão da indústria para previsão de séries temporais. Eles combinam a ideia de que o valor presente de uma série depende dos seus valores passados com a ideia de que os erros de previsão passados também contêm informação relevante. Simples na sua formulação, poderosos na sua aplicação.

A linguagem comum

O que unifica todas essas ferramentas não é apenas o fato de serem úteis. É o fato de se conectarem.

A estatística e a probabilidade são inseparáveis — toda inferência estatística é um argumento probabilístico. O cálculo e a álgebra linear convergem no gradiente — que é um vetor de derivadas parciais, um objeto que vive simultaneamente nos dois mundos. A simulação usa probabilidade para explorar espaços de alta dimensão que o cálculo analítico não consegue navegar. A análise de séries temporais usa todos os outros — diferenciação para tornar séries estacionárias, álgebra linear para resolver sistemas de equações, probabilidade para modelar o ruído.

Nos volumes seguintes, você verá essas conexões tornarem-se cada vez mais explícitas. No Volume II, o *gradient descent* do cálculo encontra a programação linear da otimização. No Volume III, a álgebra linear das matrizes de adjacência encontra a teoria dos grafos das redes. No Volume V, as equações diferenciais do cálculo encontram os sistemas dinâmicos e o caos. No Volume VI, tudo converge nas redes neurais — que são, em essência, composições de transformações lineares com não-linearidades, otimizadas por gradiente descendente sobre distribuições de probabilidade.

As ferramentas deste volume não são apenas úteis. São a gramática de uma linguagem que a ciência moderna fala fluentemente — e que este volume ensina a ler, escrever e pensar.

Como usar este volume

Cada capítulo foi escrito para ser autossuficiente, mas a sequência tem uma lógica: probabilidade antes de estatística, porque a estatística é probabilidade aplicada a dados; cálculo antes de álgebra linear, porque os *eigenvalues* são mais naturais depois de entender derivadas; tudo antes de simulação, porque a simulação usa todos os conceitos anteriores.

Os exercícios são de dois tipos: analíticos, que pedem demonstrações e cálculos à mão; e computacionais, que pedem implementações em Python. Ambos são necessários. O exercício analítico revela por que a

ferramenta funciona. O exercício computacional revela como ela se comporta em problemas reais, com dados reais, nas escalas em que ela é de fato usada.

Se você vem do Volume 0, encontrará aqui os números que o Volume 0 problematizou sendo usados para construir. A tensão entre fundamento e aplicação que percorre toda a coleção começa a se resolver aqui — não porque as perguntas filosóficas deixem de importar, mas porque as ferramentas que construímos sobre elas começam a fazer coisas extraordinárias no mundo.

Se você está começando aqui, sem ter lido o Volume 0, não há problema. Este volume não pressupõe os seus resultados — apenas a disposição de trabalhar com rigor e a curiosidade de perguntar não apenas *como* calcular, mas *por que* o cálculo funciona.

Uma última palavra antes de começar

O físico Richard Feynman disse certa vez que a matemática não é apenas um conjunto de ferramentas para a física — ela é uma linguagem na qual a física está escrita, e quem não fala essa linguagem não consegue realmente ler o que a natureza diz.

O mesmo vale para a biologia computacional, a economia moderna, a ciência de dados, a engenharia de sistemas e a inteligência artificial. Não porque os praticantes dessas disciplinas precisem ser matemáticos profissionais, mas porque as ideias fundamentais que estruturam o seu trabalho — incerteza, otimização, transformação, dinâmica — são ideias matemáticas. E entendê-las profundamente, e não apenas operacionalmente, é a diferença entre aplicar receitas e compreender o que se está fazendo.

Este volume não vai transformá-lo num matemático. Mas vai dar-lhe as ferramentas para pensar matematicamente sobre o mundo — e, nos volumes que seguem, para ver como esse pensamento ilumina alguns dos fenômenos mais complexos e fascinantes da natureza, da sociedade e da tecnologia.

As ferramentas estão aqui. O resto é construção.

Vamos começar.

Error! No text of specified style in document.

1. Programação como Instrumento Matemático Moderno

2. Estatística: Desvendando Padrões e Insights

Estatística Descritiva

Estatística Inferencial

Variáveis e Métricas em Estatística

Variáveis Aleatórias

Medidas de Tendência Central

Média (*Mean*)

Moda (*Mode*)

Mediana (*Median*)

Desvio padrão (σ)

Variância (σ^2)

Média Harmônica (HM)

Média Geométrica (GM)

Erro padrão (Standard Error)

Desvio-padrão vs. Erro-padrão

Correlação e Covariância

Covariância

Correlação

O Coeficiente de Spearman — quando Pearson não é suficiente

Correlação Não Implica Causalidade

Exercícios

3. Testes Estatísticos: Como os Dados Defendem seu Argumento

Teste de Hipótese Estatística

O *p-value*

Valor Crítico, Significância e Confiança

Erros Tipo I, Tipo II e Poder do Teste

Estatísticas de Teste

Estatística *z*

Teste *t* de Student

Exercícios

4. Distribuições de Probabilidade: Moldando a Incerteza

Famílias de Distribuições

Funções de Probabilidade

PDF — (Função Densidade de Probabilidade)

PMF - Função Massa de Probabilidade

CDF — Função de Distribuição Acumulada

Distribuição Normal ou Gaussiana

Error! No text of specified style in document.

Assimetria (*Skewness*) e Curtose (*Kurtosis*)

Momentos

Testes de Normalidade

Distribuições de Probabilidade Contínuas

Distribuições z e t de Student

Distribuição Uniforme

Distribuição Exponencial

Distribuições de Probabilidade Discretas

Distribuição Uniforme

Distribuição de Bernoulli

Distribuição Binomial

Distribuição de Poisson

Conexão entre Poisson e Exponencial

Teorema Central do Limite (CLT) e A Lei Dos Grandes Números (LLN)

Exercícios

5. Teoria da Probabilidade: A Lógica do Acaso

Espaço amostral e eventos

Espaço amostral discreto e finito

Independência

Teoremas da Probabilidade

Teorema do Complemento

Teorema da Adição

Teorema da Multiplicação

Probabilidade Condicional

Interpretação Frequentista versus Bayesiana

Teorema de Bayes

Expectativa

Pearl's do-calculus – O que Realmente Causa O quê

Paradoxo de Simpson

Exercícios

6. Combinatória: A Arte dos Arranjos

Combinações (A Ordem Não Importa)

O Teorema Binomial

Permutações (ordem importa)

Exercícios

7. Modelos Lineares – Previsão com Simplicidade

Regressão Linear (um tipo de Modelo Linear)

Exemplos de Regressão Linear Múltipla

Error! No text of specified style in document.

Avaliação de um Modelo de Regressão Linear

8. Modelos Não Lineares: Além da Linha Reta

Modelos de Potência

Modelos Exponenciais

Modelos Logarítmicos

Juros, Investimentos e Dívidas

Visualização de Modelos de Crescimento

Modelos de Crescimento Logístico

Exercícios

9. Séries Temporais

Séries Temporais Estacionárias

Decomposição de Séries Temporais

Modelos Autoregressivos (AR)

Funções de Autocorrelação (ACF) e Autocorrelação Parcial (PACF)

Função de Autocorrelação (ACF)

Função de Autocorrelação Parcial (PACF)

ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*)

10. Cálculo: A Matemática da Mudança

Função

Função composta

Limites

O paradoxo de Zeno: Aquiles e a Tartaruga

A Derivada

Newton e a maçã

Calculando a Derivada

Calculando a derivada pela definição

A derivada como taxa de variação

Notações Para Derivada

A Regra Da Potência

A Regra da Cadeia

Máximos, mínimos e derivadas

Máximos e Mínimos Globais

Derivadas Parciais e Gradiente

O Gradiente

Soluções Analíticas versus Numéricas

Gradient Descent

Saddle Point (Ponto de Sela)

Pontos críticos e o papel da derivada

A Integral

Ideias Fundamentais sobre Integrais

Aproximando a Área com Retângulos

A Definição de Integral

A Integral como a Operação Inversa da Derivada

O Teorema Fundamental do Cálculo

Crescimento e Decrescimento

Equações Diferenciais

A Equação Diferencial Logística

Método de Euler

Limitações do Método de Euler

Quando Usar Métodos Analíticos ou Numéricos

Exercícios

11. Álgebra Linear

Introdução a Álgebra Linear

Tipos de Matrizes

Notação

Notação de Vetor Coluna

Notação de Vetor Linha

Matriz Quadrada

Matriz Diagonal

Matriz Identidade

Matriz Transposta

Matriz Simétrica

Determinantes

Matriz Inversa

Matrizes Ortonormal e Ortogonal

Operações Matriciais

Adição e Subtração de Matrizes

Produto Escalar (*Dot Product*)

Multiplicação de Matrizes

Não Comutatividade

Transposta de um Produto

A Matriz de Covariância

Matriz de Covariância vs. Matriz de Correlação (r)

Autovetores e Autovalores (*Eigenvectors e Eigenvalues*)

Interpretação Matemática

Sistemas de Equações Lineares

Error! No text of specified style in document.

Tensores

Tipos de Tensores

Resolvendo à mão!

Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear

12. Transformações de Dados — Remodelando Informações

Transformações Afins

Combinações Lineares

Usando Matrizes para Transformar Dados

Exemplo de Transformação Afim

Transformações com Matrizes

Transformações afins em dados

Transformações não lineares em dados

Matriz de Escalonamento (*scale matrix*)

Matriz de Rotação

Matriz de Cisalhamento (*Shear*)

A Conexão Conceitual

Transformação de Escalas

Álgebra Linear em Python

Arrays

DataFrame

Series

Operações com Matrizes

Matriz Inversa

Potência em Matrizes

Resolvendo Equações Matriciais

Multiplicação Matriz–Vetor

13. Questões e Resoluções

Questões

Resoluções

Epílogo

Bibliografia

Error! No text of specified style in document.